

Bose-Einstein Kondensation

- når atomer synger i kor

Nicolai Nygaard



Fysiklærerdag
27. Januar 2006

Bose-Einstein kondensation er idag det mest dynamiske forskningsområde indenfor atomfysikken. Ved at køle atomare gasser til hidtil uhørt lave temperaturer, kan man få atomerne til at miste deres identitet, således at de begynder at opføre sig som en slags superatom, der repræsenterer en makroskopisk manifestation af det kvantemekaniske stofbølge begreb. I deres fælles svingninger synger atomerne om man så må sige i kor. Foredraget her fortæller dels hvad Bose-Einstein kondensation (BEC) er for noget, og hvordan man laver det. Slutteligt vil jeg give et kort indblik i hvordan disse ultrakolde gasser opfører sig.

Forspil: Kvantemekanikkens fødsel

- 1900: Planck forklarer hulrumsstråling. Indfører **kvanter**.
- 1905: Einstein forklarer fotoelektrisk effekt. Indfører **fotoner**.
- 1917: Einstein postulerer stimuleret emission. Grundlæggende for lasere.
- 1924: L. de Broglie introducerer **stofbølger**.

$$\lambda = h/p = h/mv$$

2

Kvantefysikken blev født i år 1900, hvor Max Planck forklarede spektret for hulrumstråling ved at betragte oscillatorer der udsender og absorberer lys. Han postulerede, at energien for disse oscillatorer kommer i små bundter som han kaldte kvanter. Einstein indførte i 1905 fotonen som de grundlæggende kvanter for det elektromagnetiske felt, og brugte disse til at forklare den fotoelektriske effekt. Men der skulle gå mere end 15 år før fotonbilledet blev taget alvorligt. I mellemtiden arbejdede Einstein videre på sin strålingsteori og introducerede i 1917 begrebet stimuleret emission, som er grundlaget for lasere. Som vi skal se senere spiller lasere en stor rolle i vores fortælling om BEC, dels fordi atomerne i et Bose–Einstein kondensat på mange måde opfører sig analogt til fotonerne i en laser, dels fordi lasere er essentielle i de metoder der idag til at køle atomskyer ned til de ekstremt lave temperaturer, hvor BEC er muligt.

En skelsættende begivenhed i kvantefysikkens historie var Louis de Broglies hypotese om stofbølger fremsat i hans ph.d. afhandling i 1924. de Broglie postulerede, at stof har en bølgenatur, karakteriseret ved en bølgelængde der er forholdet mellem Planck's konstant og impulsen. Dette var en videreførelse af den partikel–bølge dualitet for lyset, som havde været kendt siden Newton og Huygens. de Broglie fortalte os, at stof kan opføre sig ikke bare som partikler, men også som bølger, og at bølgekarakteren bliver mere udbredt for lette partikler som bevæger sig langsomt. For hverdagsting som et strygejern er massen så stor, at de bølgelængden er forsvindende lille. Strygejernet opfører sig følgelig klassisk. Men for små ting som atomer kan de Broglie bølgelængden, som vi skal senere, blive betragtelig sammenlignet med andre relevante længdeskalaer.

Bose og Einstein, 1924



3

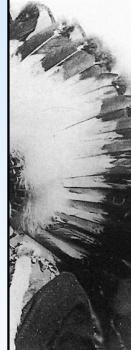
I 1924 sendte den ukendte bengalske fysiker Satyendranath Bose en artikel til Einstein hvori han som den første udledte Planck's strålingslov uden henvisninger til den klassiske elektrodynamik. Som en af de første benyttede Bose Einsteins fotonbegreb. Og ved at antage, at fotoner er uskelnelige partikler kunne han ved hjælp af statistiske betragtninger redegøre for spektret for hulrumstrålingen. Som sagt var fotonbegrebet dengang kontroversielt og Bose havde forsøgt at få artiklen publiceret i Philosophical Magazine som afviste den. Han sendte den til Einstein og bad ham oversætte den til tysk og sørge for at publicere den i Zeitschrift für Physik. Som sagt så gjort.

Bose og Einstein, 1924



"I do not know sufficient German to translate the paper. If you think the paper worth publication I shall be grateful if you arrange for its publication in *Zeitschrift für Physik*. Though a complete stranger to you, I do not hesitate in making such a request. Because we are all your pupils though profiting only from your teachings through your writings..."

Bose, to Einstein 4 June, 1926



3

I 1924 sendte den ukendte bengalske fysiker Satyendranath Bose en artikel til Einstein hvori han som den første udledte Planck's strålingslov uden henvisninger til den klassiske elektrodynamik. Som en af de første benyttede Bose Einsteins fotonbegreb. Og ved at antage, at fotoner er uskelnelige partikler kunne han ved hjælp af statiske betragtninger redegøre for spektret for hulrumstrålingen. Som sagt var foronbegrebet dengang kontroversielt og Bose havde forsøgt at få artiklen publiceret i Philosophical Magazine som afviste den. Han sendte den til Einstein og bad ham oversætte den til tysk og sørge for at publicere den i *Zeitschrift für Physik*. Som sagt så gjort.

Bose-Einstein kondensation

Bose-Einstein fordelingen

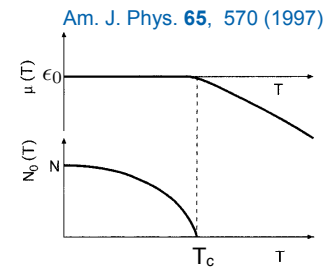
$$n_{\nu} = \frac{1}{e^{(\epsilon_{\nu} - \mu)/k_B T} - 1}$$

Kemiske potential bestemt ud fra betingelsen

$$N = \sum_{\nu} n_{\nu}$$

Den maksimale værdi for μ er grundtilstandsenergien ϵ_0

Når $\mu = \epsilon_0$ deles gassen i to dele:
"Én del kondenserer, resten forbliver en
fortættet ideal gas"



4

Einstein generaliserede Boses arbejde til massive partikler, og forudsagde derved et helt nyt naturfænomen, Bose-Einstein kondensation. Han kunne udlede fra Boses postulat om uskelneligheden af partiklerne, at antallet af partikler i en given kvantetilstand, n_{ν} med energi ϵ_{ν} , er bestemt ved den funktion vi idag kalder for Bose-Einstein fordelingen. Her er k_B Boltzman's konstant og T er temperaturen. μ angiver det kemiske potential, som skal bestemmes ud fra kravet, at antallet af partikler N er bevaret. N er blot summen af antallet af partikler i hver kvantetilstand. Befolkningen omvendt proportional med tilstandens energi. Jo højere temperaturen er, desto lavere er den gennemsnitlige befolkningen af de forskellige tilstande. Men i takt med at temperaturen stiger kan tilstande med højere og højere energi blive befolket.

Ved meget høje temperaturer er gassen klassisk, det vil sige at den opfylder Maxwell-Boltzmann statistik, som kan forstås uden kvantemekanikken. I denne grænse er det kemiske potential lig med minus uendelig, således at befolkningen af alle tilstande er meget lille. Til gengæld er der en endelig sandsynlighed for at finde en partikel i alle tilstande. Når temperaturen falder stiger det kemiske potential, det bliver mindre negativt. Einstein indså, at den maksimale værdi det kemiske potential kan antage er grundtilstandsenergien ϵ_0 , eftersom befolkningen i en tilstand med energi ϵ_{ν} vil blive negativ, såfremt $\mu > \epsilon_{\nu}$.

Bose-Einstein kondensation

Bose-Einstein fordelingen

$$n_\nu = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/k_B T} - 1}$$

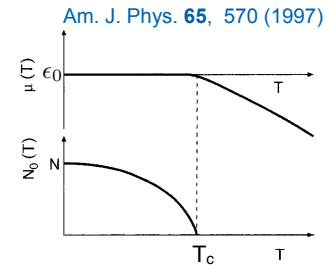
Kemiske potential bestemt ud fra betingelsen

$$N = \sum_\nu n_\nu$$

Den maksimale værdi for μ er grundtilstandsenergien ϵ_0

Bose-Einstein kondensat

$$N_0 = N - \sum_{\nu \neq 0} n_\nu$$



4

Einstein generaliserede Boses arbejde til massive partikler, og forudsagde derved et helt nyt naturfænomen, Bose-Einstein kondensation. Han kunne udlede fra Boses postulat om uskelneligheden af partiklerne, at antallet af partikler i en given kvantetilstand, n_ν med energi ϵ_ν , er bestemt ved den funktion vi idag kalder for Bose-Einstein fordelingen. Her er k_B Boltzman's konstant og T er temperaturen. μ angiver det kemiske potential, som skal bestemmes ud fra kravet, at antallet af partikler N er bevaret. N er blot summen af antallet af partikler i hver kvantetilstand. Befolkningen omvendt proportional med tilstandens energi. Jo højere temperaturen er, desto lavere er den gennemsnitlige befolkningen af de forskellige tilstande. Men i takt med at temperaturen stiger kan tilstande med højere og højere energi blive befolket.

Ved meget høje temperaturer er gassen klassisk, det vil sige at den opfylder Maxwell-Boltzmann statistik, som kan forstås uden kvantemekanikken. I denne grænse er det kemiske potential lig med minus uendelig, således at befolkningen af alle tilstande er meget lille. Til gengæld er der en endelig sandsynlighed for at finde en partikel i alle tilstande. Når temperaturen falder stiger det kemiske potential, det bliver mindre negativt. Einstein indså, at den maksimale værdi det kemiske potential kan antage er grundtilstandsenergien ϵ_0 , eftersom befolkningen i en tilstand med energi ϵ_ν vil blive negativ, såfremt $\mu > \epsilon_\nu$.

BEC - en makroskopisk stofbølge

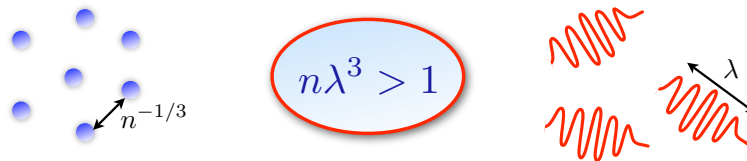
Einstein brugte de Broglies nye stofbølgebegreb

I en termisk gas

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \sim k_B T$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \sim \frac{h}{\sqrt{2mk_B T}}$$

Bose-Einstein kondensation finder sted når



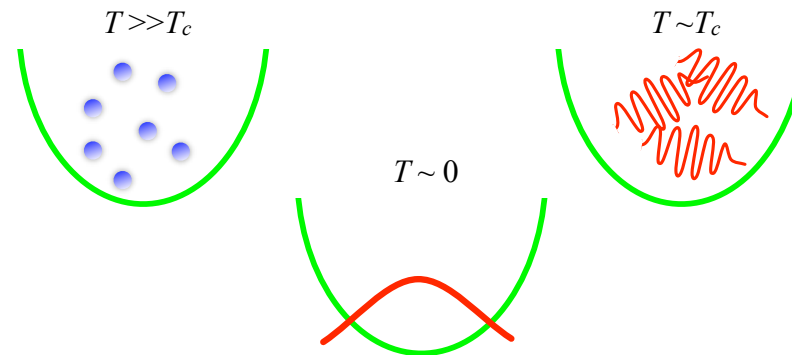
5

Vi kan anskue Bose-Einstein kondensation på en alternativ måde, som på sin vis bedre illustrerer hvad det er der sker når en del af gassen med Einsteins ord kondenserer ned i den laveste energitilstand. Det har at gøre med atomernes bølgenatur. Hvis vi er interesserede i størrelsen af de Broglie bølgelængden for atomer i en termisk gas skal vi bruge et estimat af deres karakteristiske impuls. Vi ved, at atomernes hastighed er et udtryk for temperaturen. Mere præcist gælder det, at den kinetiske energi i middel er omtrent det samme som som temperaturen skaleret med Boltzmanns konstant. Derfor vil impulsen skalere som kvadratroden af temperaturen, mens de Broglie bølgelængden vil være proportional med en over kvadratroden af T . Bemærk, at middelværdien af impulsen, som er en vektor, er nul, eftersom atomernes hastigheder er ligeligt fordelt i alle retninger, som vi senere skal se. Derfor er den karakteristiske **størrelse** af impulsen givet ved kvadratroden af middelværdien af p^2 .

Vi ved nu, at de Broglie bølgelængden vokser, når temperaturen falder. Det betyder, at atomerne mister deres partikelnatur i takt med at de køles, og at de istedet bliver mere og mere udtværede bølgepakker. På et tidspunkt bliver udtstrækningen af disse bølgepakker, som er givet ved de Broglie bølgelængden, sammenlignelig med middelfstanden mellem partiklerne. Det betyder, at de enkelte bølgepakker begynder at overlappe, og da atomerne er uskelnelige betyder det effektivt, at de Broglie bølgerne smelter sammen. Atomerne begynder at svinge i takt. Dette er essensen i Bose-Einstein kondensation. Når temperaturen når ned i nærheden af det absolutte nulpunkt er alle atomerne i kondensatet, som udgør én stor stofbølge, en slags superatom. Da alle atomerne er i kondensatet er de allesammen beskrevet ved den samme bølgefunktion. De er i nøjagtig den samme kvantetilstand.

BEC - en makroskopisk stofbølge

Nær det absolutte nulpunkt er et makroskopisk antal af partiklerne i den samme kvantetilstand



6

Disse tegninger viser skematisk situationen i gassen for høje temperaturer, hvor atomerne opfører sig som små veldefinerede biliardkugler. Nær den kritiske temperatur T_c begynder de at antage bølgenatur, og de enkelte stofbølger begynder at overlape. Nær det absolutte nulpunkt udgør atomerne én makroskopisk stofbølge.

To slags partikler

Naturen inddeler identiske partikler i to forskellige klasser efter **symmetrien** af deres fælles bølgefunktion under ombytninger

$$\Psi(\dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j, \dots) = \lambda \Psi(\dots, \mathbf{x}_j, \dots, \mathbf{x}_i, \dots) \quad \lambda^2 = 1$$

Bosoner: **symmetrisk** $\lambda = +1$

Kraft bærerene; fotoner, fononer, mesoner, ...

Fermioner: **anti-symmetrisk** $\lambda = -1$

Stof; elektroner, protoner, neutroner, ...

7

Bose og Einstein diskuterede deres nye statistiske beskrivelse af fotoner og atomer uden at vide at Naturen også tillader en anden slags partikler, fermioner. Vi ved nu at disse to klasser af partikler adskiller sig ved opførslen af deres bølgefunktion under ombytning af et par af partikel. Hvor bølgefunktionen for bosoner er uændret, den er symmetrisk, skifter den for fermioner fortegn, og vi siger at den er anti-symmetrisk. Det er en grundlæggende empirisk observation, at kun disse to muligheder forekommer i Naturen. Fermioner blev første gang beskrevet af Enrico Fermi i 1926. Æren for navnene boson og fermion skylder vi Paul Dirac.

Det er værd at bemærke, at hvor Bose-Einstein fordelingsfunktionen tillader et vilkårligt antal partikler i en given tilstand, så længe antallet er mindre end det totale antal N , så er fermioner istedet pålagt at adlyde Paulis udelukkelsesprincip, som dikterer at kun en enkelt fermion kan befinde sig i en given kvantetilstand. Der kan (statistisk set) godt være mellem nul og en fermion i en kvantetilstand, men altså aldrig mere end en. Dette er en direkte konsekvens af anti-symmetrien af bølgefunktionen for fermioner, og eftersom alt stof såsom elektroner, protoner og neutroner er fermioner er Paulis udelukkelsesprincip en af hjørnesteenene i den verden vi lever i. Uden denne naturlov havde vi ikke det periodiske system og kemien ville være fundamentalt anderledes. Selvom fermioner er ekstremt interessante, så omhandler dette foredrag bosoner i almindelighed og Bose-Einstein kondensation i særdeleshed. Så se på hvordan man bærer sig ad med at lave et Bose-Einstein kondensat.

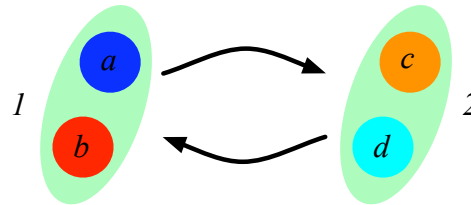
Afsnit II

BEC i Atomare Gasser

Det kræver ekstremt lave temperaturer at lave et Bose-Einstein kondensat i en gas. Derfor skulle der gå 70 år fra Einsteins forudsigelse til det lykkedes eksperimentelt.

Statistik for sammensatte partikler

$2n$ fermioner = boson, $2n+1$ fermioner = fermion



$$\mathcal{P}_{12}\Psi = \mathcal{P}_{ac}\mathcal{P}_{bd}\Psi = (-1)^2\Psi = \Psi$$

Bosoner: ${}^1\text{H}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^{87}\text{Rb}$,... Fermioner: ${}^6\text{Li}$, ${}^{40}\text{K}$,...

Ehrenfest and Oppenheimer, Phys. Rev. **37**, 333 (1931)

9

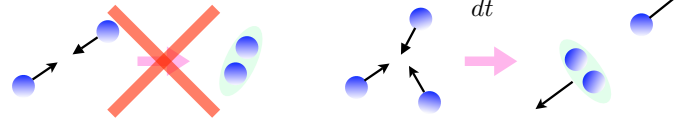
Som det fremgik tidligere er de fundamentale byggesten i stoffet alle fermioner, så hvordan kan man overhovedet lave et BEC? Sagen er den, at identiske samlinger af fermioner kan opføre sig som både fermioner og bosoner. Det vigtige er hvor mange fermioner hver klynge består af. Hvis antallet af fermioner i en sammensat partikel er et lige tal, ja så er der tale om en boson, og ombytning af to sådanne klynger vil ikke ændre på bølgefunktionen. Er antallet af fermioner i klyngen derimod ulige vil den sammensatte partikel opføre sig som en fermion. Det er forholdsvis nemt at overbevise sig om at det må forholde sig sådan ved at betragte et par af klynger, der hver består af to fermioner. Hvis vi vil ombytte de to klynger kan vi gøre det ved at ombytte først et par af de ialt fire fermioner. Derved skifter bølgefunktionen fortegn. Hvis vi derefter ombytter det andet par af fermioner har vi effektivt ombyttet de to klynger, men ved denne anden ombytning skal bølgefunktionen igen skifte fortegn, så den samlet har det samme fortegn som for ombytningerne. En klynge af to fermioner opfører sig derfor som en boson. Dette argument kan nemt generaliseres til klynder, der består af et vilkårligt antal fermioner.

Hvis man ser på atomer består de af elektroner, protoner og neutroner. Alle fermioner. Ved at bruge vores lille regel kan vi f.eks. forudsige, at isotopen ${}^6\text{Li}$ er en fermion, da den består af 3 elektroner, 3 protoner og 3 neutroner ($3+3+3=9$), mens fætteren ${}^7\text{Li}$ er en boson, da den indeholder en ekstra neutron, og dermed et lige antal fermioner.

Metastabilitet

Problem: Ved lave temperaturer er den stabile tilstand ikke en gas men et fast stof

Løsning: ① Hold tætheden lav



② Vakuüm: Minimerer kollisioner med baggrundsgas

③ Hold atomerne fanget så de ikke kommer i kontakt med væggene

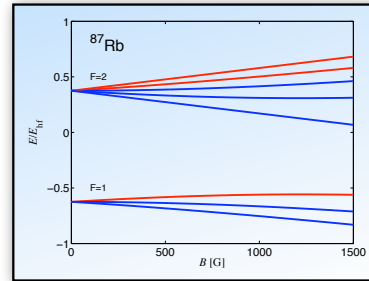
Metastabil gas med levetid > minutter

10

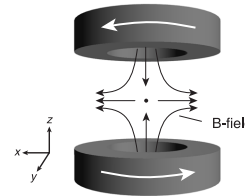
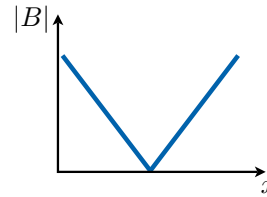
Et umiddelbart problem med at køle en atomar gas ned til temperaturer i nærheden af det absolutte nulpunkt er, at ved så lave temperaturer er den stabile tilstandsform et fast stof. Hvis man er interesseret i at studere BEC i en gas må man derfor indstille sig på at gassen kun har en endelig levetid. Med tiden vil gassen fryse, og ende som en klump fast stof, men hvis stoffet forbliver på gasform længe nok til observere BEC, er det acceptabelt, at gassen kun er metastabil.

Der er tre kriterier for at opnå en gas med lang levetid. Et fast stof er karakteriseret ved stærke bindinger mellem partiklerne, der organiserer dem i et fast mønster. Det første skridt på vejen mod dannelse af stor klump fast stof er derfor at atomer binder sig til hinanden i par og laver små molekyler. Her er det afgørende at to atomer, der kolliderer, ikke alene kan binde sig sammen til et molekyle. Det kan simpelthen ikke lade sig gøre, hvis energien og impulsen samtidigt skal være bevaret. Kun hvis der er et tredje atom i nærheden til at bære den energi der bliver tilovers ved den kemiske binding væk i form af kinetisk energi kan bindingsprocessen forløbe. Med andre ord kræver bindingsreaktioner, at tre atomer mødes på samme sted. Sådanne processer vil derfor have en rate der er proportional med tætheden i tredje potens, og de kan derfor undertrykkes, hvis tætheden holdes lav. En anden kilde til tab af gassen er kollisioner med atomer i baggrundsgassen. Sådanne 'fremmede' atomer kan agere som den tredje part i en bindingsreaktion, så det gælder om at holde koncentrationen af andre atomer nede. Det svarer til at holde gassen i et ultrahøjt vakuum. Endelig kan man miste atomerne i gassen ved at de klistrer sig til væggene i vakuumkammeret. Dette er specielt et problem når gassen bliver kold. Derfor holder man atomerne fanget i magnetiske fælder, hvori den ekstremt kolde sky svæver i midten af et vakuumkammer, der er ved stuetemperatur. Med disse forholdsregler kan man idag opnå levetider for en kold atomar gas på adskillige minutter. Da termodynamisk ligevægt kan etableres på langt under et sekund, er levetiden mere end lang nok til at et Bose-Einstein kondensat kan dannes og studeres, hvis temperaturen er lav nok.

Magnetiske fælder



Atomer i bestemte indre tilstande kan fanges nær minimum i magnetfeltet.

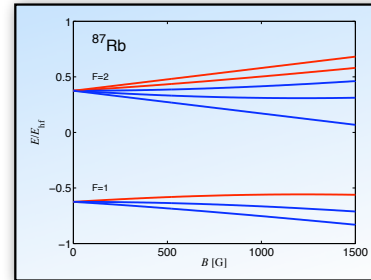


11

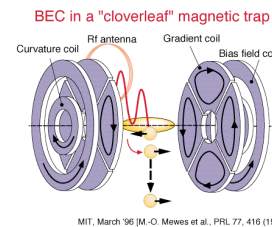
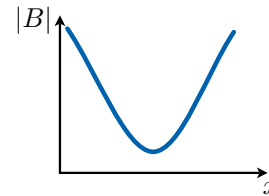
En sådan magnetisk fælde konstrueres ved at udnytte, at atomernes energi er en funktion af styrken af et ydre magnetfelt. Dette Zeeman skift afhænger af atomernes indre tilstand. For nogle tilstande stiger energien når magnetfeltet vokser, mens energien for andre tilstande aftager. Det betyder, at man kan fange atomer i tilstande af den første type nær et område i rummet, hvor magnetfeltet har et minimum (det er ifølge elektrodynamikken ikke muligt at lave et lokalt maksimum for magnetfeltet). En måde at lave et magnetfeltsminimum på er at have to spoler med modsatrettede strømme. Det giver anledning til et quadrupolfelt, som vokser lineært fra nul i punkt midt mellem spolerne.

Problemet med quadrupol felt er, at det har et nulpunkt. I dette punkt er projektionen af atomernes spin på magnetfeltsaksen ikke veldefineret og derfor kan atomerne skifte fra en tilstand der søger lavt magnetfelt til en der søger mod højt magnetfelt. Man kan stoppe dette "hul" ved at benytte en anden spolekonfiguration, som giver anledning til et B-felt, som ikke har et nulpunkt. Atomerne ser så et potentiale der kan tilnærmes med et harmonisk oscillator potential.

Magnetiske fælder



Atomer i bestemte indre tilstande kan fanges nær minimum i magnetfeltet.

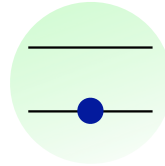


11

En sådan magnetisk fælde konstrueres ved at udnytte, at atomernes energi er en funktion af styrken af et ydre magnetfelt. Dette Zeeman skift afhænger af atomernes indre tilstand. For nogle tilstande stiger energien når magnetfeltet vokser, mens energien for andre tilstande aftager. Det betyder, at man kan fange atomer i tilstande af den første type nær et område i rummet, hvor magnetfeltet har et minimum (det er ifølge elektrodynamikken ikke muligt at lave et lokalt maksimum for magnetfeltet). En måde at lave et magnetfeltsminimum på er at have to spoler med modsatrettede strømme. Det giver anledning til et quadrupolfelt, som vokser lineært fra nul i punkt midt mellem spolerne.

Problemet med quadrupol felt er, at det har et nulpunkt. I dette punkt er projektionen af atomernes spin på magnetfeltsaksen ikke veldefineret og derfor kan atomerne skifte fra en tilstand der søger lavt magnetfelt til en der søger mod højt magnetfelt. Man kan stoppe dette "hul" ved at benytte en anden spolekonfiguration, som giver anledning til et B-felt, som ikke har et nulpunkt. Atomerne ser så et potentiale der kan tilnærmes med et harmonisk oscillator potential.

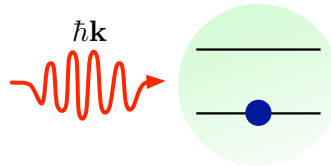
Laserkøling



12

For at få atomerne tilstrækkeligt kolde til at de kan smelte sammen til en sammenhængende stofbølge, må man anvende to forskellige køleteknikker. Man bruger først laserkøling til at sænke temperaturen til nogle få mikrokkelvin. Laserkøling fungerer som illustreret her. Hvis et atom belyses med en laser, hvis frekvens er indstillet til at være resonant med en overgang mellem to atomare energiniveauer, kan atomet absorbere en foton fra laseren. Det får atomet til at hoppe fra den nedre til den øvre energitilstand, og samtidig får det et lille rekylspark i laserlysets udbredelsesretning, da den samlede impuls skal være bevaret. Sørrelsen af atomets hastighedsændring er bestemt af forholdet mellem lysets bølgevektor og atomets masse. På et senere tidspunkt vil atomer henfalde og spontant udsende en ny foton med den samme bølgelængde. Det giver også anledning til et rekylspark, men i den modsatte retning af fotonmudsendelse, så den samlede impuls er uændret. Det afgørende er at fotonen der udsendes under spontan emission har en vilkårlig retning. Dermed er hastighedsændringen forårsaget af spontan emission også i en tilfældig retning. Hvis man lader atomet gennemgå adskillige absorptions og emissions cykler vil atomer for hver absorption få et spark i laserens udbredelsesretning, mens rekylsparkene vil midle til nul.

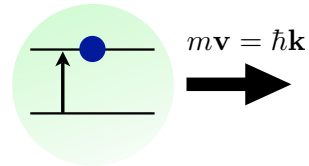
Laserkøling



12

For at få atomerne tilstrækkeligt kolde til at de kan smelte sammen til en sammenhængende stofbølge, må man anvende to forskellige køleteknikker. Man bruger først laserkøling til at sænke temperaturen til nogle få mikrokølv. Laserkøling fungerer som illustreret her. Hvis et atom belyses med en laser, hvis frekvens er indstillet til at være resonant med en overgang mellem to atomare energiniveauer, kan atomet absorbere en foton fra laseren. Det får atomet til at hoppe fra den nedre til den øvre energitilstand, og samtidig får det et lille rekylspark i laserlysets udbredelsesretning, da den samlede impuls skal være bevaret. Sørrelsen af atomets hastighedsændring er bestemt af forholdet mellem lysets bølgevektor og atomets masse. På et senere tidspunkt vil atomer henfalde og spontant udsende en ny foton med den samme bølgelængde. Det giver også anledning til et rekylspark, men i den modsatte retning af fotonmudsendelse, så den samlede impuls er uændret. Det afgørende er at fotonen der udsendes under spontan emission har en vilkårlig retning. Dermed er hastighedsændringen forårsaget af spontan emission også i en tilfældig retning. Hvis man lader atomet gennemgå adskillige absorptions og emissions cykler vil atomer for hver absorption få et spark i laserens udbredelsesretning, mens rekylsparkene vil midle til nul.

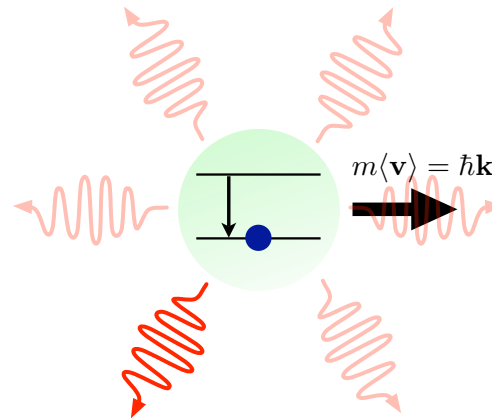
Laserkøling



12

For at få atomerne tilstrækkeligt kolde til at de kan smelte sammen til en sammenhængende stofbølge, må man anvende to forskellige køleteknikker. Man bruger først laserkøling til at sænke temperaturen til nogle få mikrokkelvin. Laserkøling fungerer som illustreret her. Hvis et atom belyses med en laser, hvis frekvens er indstillet til at være resonant med en overgang mellem to atomare energiniveauer, kan atomet absorbere en foton fra laseren. Det får atomet til at hoppe fra den nedre til den øvre energitilstand, og samtidig får det et lille rekylskub i laserlysets udbredelsesretning, da den samlede impuls skal være bevaret. Sørrelsen af atomets hastighedsændring er bestemt af forholdet mellem lysets bølgevektor og atomets masse. På et senere tidspunkt vil atomer henfalde og spontant udsende en ny foton med den samme bølgelængde. Det giver også anledning til et rekylskub, men i den modsatte retning af fotonmudsendelse, så den samlede impuls er uændret. Det afgørende er at fotonen der udsendes under spontan emission har en vilkårlig retning. Dermed er hastighedsændringen forårsaget af spontan emission også i en tilfældig retning. Hvis man lader atomet gennemgå adskillige absorptions og emissions cykler vil atomer for hver absorption få et skub i laserens udbredelsesretning, mens rekylskubene vil midle til nul.

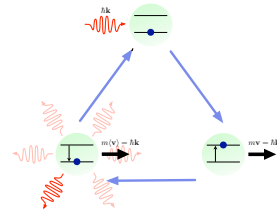
Laserkøling



12

For at få atomerne tilstrækkeligt kolde til at de kan smelte sammen til en sammenhængende stofbølge, må man anvende to forskellige køleteknikker. Man bruger først laserkøling til at sænke temperaturen til nogle få mikrokkelvin. Laserkøling fungerer som illustreret her. Hvis et atom belyses med en laser, hvis frekvens er indstillet til at være resonant med en overgang mellem to atomare energiniveauer, kan atomet absorbere en foton fra laseren. Det får atomet til at hoppe fra den nedre til den øvre energitilstand, og samtidig får det et lille rekylspark i laserlysets udbredelsesretning, da den samlede impuls skal være bevaret. Sørrelsen af atomets hastighedsændring er bestemt af forholdet mellem lysets bølgevektor og atomets masse. På et senere tidspunkt vil atomer henfalde og spontant udsende en ny foton med den samme bølgelængde. Det giver også anledning til et rekylspark, men i den modsatte retning af fotonmudsendelse, så den samlede impuls er uændret. Det afgørende er at fotonen der udsendes under spontan emission har en vilkårlig retning. Dermed er hastighedsændringen forårsaget af spontan emission også i en tilfældig retning. Hvis man lader atomet gennemgå adskillige absorptions og emissions cykler vil atomer for hver absorption få et spark i laserens udbredelsesretning, mens rekylsparkene vil midle til nul.

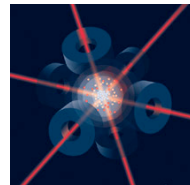
Laserkøling



En absorption/emission cyklus giver kun en lille hastighedsændring

$$\Delta v = \hbar \mathbf{k} / m = \mathcal{O}(\text{cm/s})$$

Men en laser giver mulighed for mange cykler=stor samlet hastighedsændring.



Med lasere fra 6 forskellige retninger kan en sky af atomer køles samtidig med at den holdes fanget.



Nobelpris 1997: Chu, Cohen-Tannoudji, Phillips

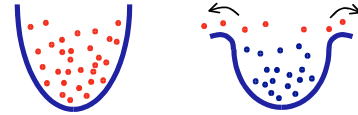
13

Hver absorptions-emissions cyklus giver kun anledning til en meget lille hastighedsændring, men fordi en laser er en monokromatisk lyskilde med høj intensitet kan atomer belyst med en laser gennemgå mange cykler på kort tid og derved få en betragtelig hastighedsændring.

Der er en lille ekstra krølle på historien. I praksis bruger man laserlys, der ikke er helt resonant med den atomare overgang, men som har en frekvens, der ligger lidt under resonansfrekvensen. Dopplerskiftet betyder så, at et atom som bevæger hen mod laserens vil se en højere laserfrekvens, og dermed kan absorbere fotoner fra laserens. Et atom, der bevæger sig væk fra laserens vil derimod se en frekvens der er skiftet yderligere væk fra resonans, og vil derfor ikke absorbere fotoner fra laserens. Ved at belyse en atomar sky med lasere fra 6 forskellige retninger kan man effektivt køle atomerne, mens de holdes fanget. De bliver skubbet ind mod midten af laserlyset.

Fordampningskøling

Lad fortrinsvis de mest energirige (**varmeste**) atomer undslippe fælden.



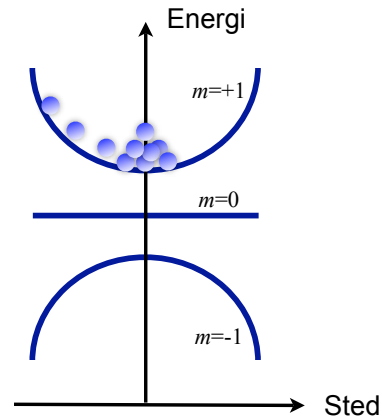
De tilbageværende atomer opnår en **lavere fælles temperatur** gennem kollisioner og gassen afkøles.



- 14

For at køle atomerne det sidste stykke mod BEC anvendes en teknik kaldet fordampningskøling. Vi kender den allesammen fra afkølingen af en kaffekop. De hurtigste vandmolekyler kan løsrive sig fra væskeoverfladen og forlade koppen som damp. Når vi puster til dampen tillader vi at nye vandmolekyler kan fordampe. Siden det er de mest energirige molekyler der forlader væsken bliver den tilbageværende væske effektivt koldere. Samme princip kan man bruge på atomare gasser. Ved selektivt at lade de mest energirige atomer fordampe ud af fælden trækker man energi ud af systemet, og de tilbageværende atomer bliver gennem indbyrdes kollisioner enige om en nye lavere temperatur.

Fordampningskøling



En RF puls kan forårsage overgange mellem **bundne** og **anti-bundne** atomare tilstande

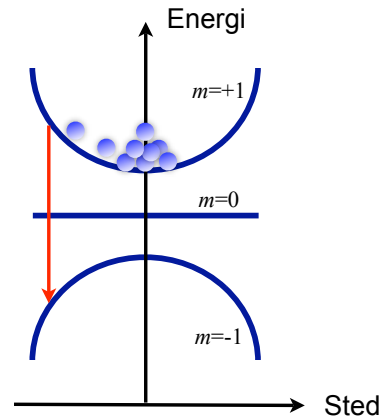
RF pulsens **frekvens** bestemmer **energien** af de atomer der fjernes

Når **frekvensen sænkes** bliver de resterende **atomer koldere**

15

De mest energirige atomer kan praktisk fjernes fra fælden ved at "belyse" atomerne med en radiofrekvens (RF) puls. En sådan puls kan inducere overgange fra en atomar tilstand, der er bundet i fælden, til en der har en lavere energi hvor magnetfeltet er størst, og som derfor vil være anti-bundet. Atomerne i denne tilstand vil altså søge væk fra fældens centrum, hvor magnetfeltet har et minimum. Som illustreret på tegningen kan man ved at indstille frekvensen af RF pulsen resonant selktivt fjerne med en bestemt energi. Når frekvensen sænkes fjerner man atomer med en lavere og lavere energi fra fælden, og under de rette forhold vil temperaturen af de tilbageværende atomer derfor falde.

Fordampningskøling



En RF puls kan forårsage overgange mellem **bundne** og **anti-bundne** atomare tilstande

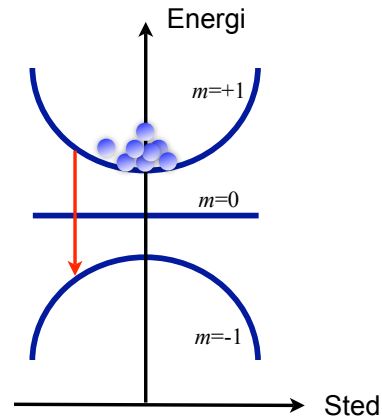
RF pulsens **frekvens** bestemmer **energien** af de atomer der fjernes

Når **frekvensen sænkes** bliver de resterende **atomer koldere**

15

De mest energirige atomer kan praktisk fjernes fra fælden ved at "belyse" atomerne med en radiofrekvens (RF) puls. En sådan puls kan inducere overgange fra en atomar tilstand, der er bundet i fælden, til en der har en lavere energi hvor magnetfeltet er størst, og som derfor vil være anti-bundet. Atomerne i denne tilstand vil altså søge væk fra fældens centrum, hvor magnetfeltet har et minimum. Som illustreret på tegningen kan man ved at indstille frekvensen af RF pulsen resonant selektivt fjerne med en bestemt energi. Når frekvensen sænkes fjerner man atomer med en lavere og lavere energi fra fælden, og under de rette forhold vil temperaturen af de tilbageværende atomer derfor falde.

Fordampningskøling



En RF puls kan forårsage overgange mellem **bundne** og **anti-bundne** atomare tilstande

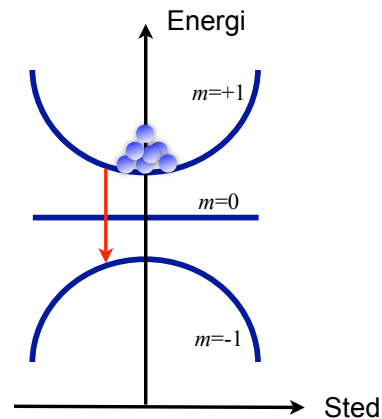
RF pulsens **frekvens** bestemmer **energien** af de atomer der fjernes

Når **frekvensen sænkes** bliver de resterende **atomer koldere**

15

De mest energirige atomer kan praktisk fjernes fra fælden ved at "belyse" atomerne med en radiofrekvens (RF) puls. En sådan puls kan inducere overgange fra en atomar tilstand, der er bundet i fælden, til en der har en lavere energi hvor magnetfeltet er størst, og som derfor vil være anti-bundet. Atomerne i denne tilstand vil altså søge væk fra fældens centrum, hvor magnetfeltet har et minimum. Som illustreret på tegningen kan man ved at indstille frekvensen af RF pulsen resonant selktivt fjerne med en bestemt energi. Når frekvensen sænkes fjerner man atomer med en lavere og lavere energi fra fælden, og under de rette forhold vil temperaturen af de tilbageværende atomer derfor falde.

Fordampningskøling



En RF puls kan forårsage overgange mellem **bundne** og **anti-bundne** atomare tilstande

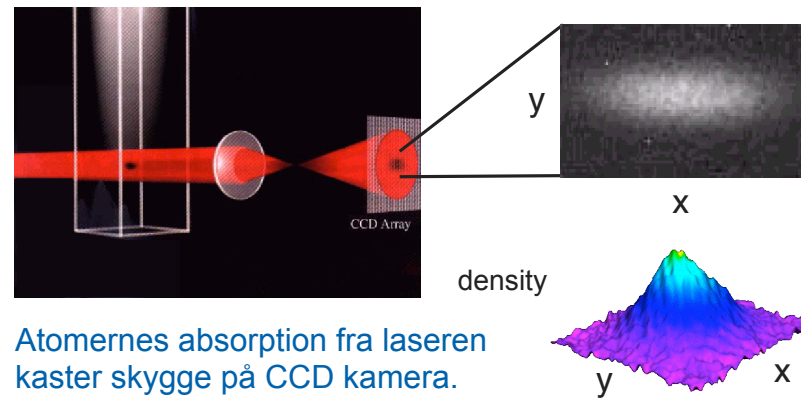
RF pulsens **frekvens** bestemmer **energien** af de atomer der fjernes

Når **frekvensen sænkes** bliver de resterende **atomer koldere**

15

De mest energirige atomer kan praktisk fjernes fra fælden ved at "belyse" atomerne med en radiofrekvens (RF) puls. En sådan puls kan inducere overgange fra en atomar tilstand, der er bundet i fælden, til en der har en lavere energi hvor magnetfeltet er størst, og som derfor vil være anti-bundet. Atomerne i denne tilstand vil altså søge væk fra fældens centrum, hvor magnetfeltet har et minimum. Som illustreret på tegningen kan man ved at indstille frekvensen af RF pulsen resonant selektivt fjerne med en bestemt energi. Når frekvensen sænkes fjerner man atomer med en lavere og lavere energi fra fælden, og under de rette forhold vil temperaturen af de tilbageværende atomer derfor falde.

Fotografering af en atomar gas



Atomernes absorption fra laseren kaster skygge på CCD kamera.

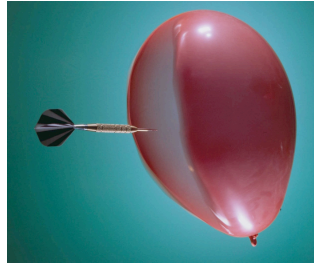
Billede efter udvidelse:
Hastighedsfordeling i fælden

$$n(x, y) = \int n(\mathbf{r}) dz$$

16

OK, men hvordan ved man at man har lavet et kondensat? En ting man kan gøre er at tage et billede af skyen. For at gøre det lader man først gassen udvide sig frit, så den bliver tilpas stor til at kunne opløses i optikken. Efter nogle milliskunder i frit fald beskinnes skyen med en laser, der er resonant med en atomar overgang. Ved fokusering af laserlyset på et CCD kamera vil skyen kaste en absorptionsskygge. Der er mindre lys der hvor atomerne har absorberet fotoner fra laseren. Jo større tæthed, desto mindre lys slipper igennem. Da man belyser skyen efter fri udvidelse, tager man effektivt et billede af hastighedsfordelingen af atomerne i fælden.

Udvidelse af klassisk gas



De molekulære hastigheder er Maxwell-Boltzmann fordelt

$$N(\mathbf{v}) \propto N \exp(-mv^2/2k_B T) d\mathbf{v}$$

(antallet af molekyler med hastighed mellem \mathbf{v} og $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$)

Under fri ekspansion er gas molekylernes position givet ved

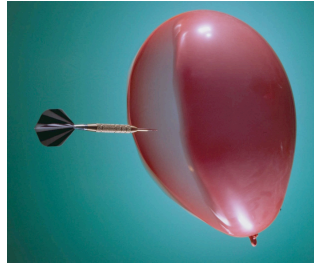
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

I grænsen $t \rightarrow \infty$ kan vi se bort fra \mathbf{r}_0

17

For en klassisk gas, altså en atomar sky ved høje temperaturer, gælder det at atomernes hastigheder er fordelt efter en Maxwell-Boltzmann fordeling. Det primære er, at antallet af atomer med en hastighed i et givent interval kun afhænger af størrelsen på deres hastighed, og derfor er uafhængigt af retningen. Derfor vil en klassisk gas altid udvide sig som en kugle i rummet. Dette er uafhængigt af formen på skyen før udvidelsen.

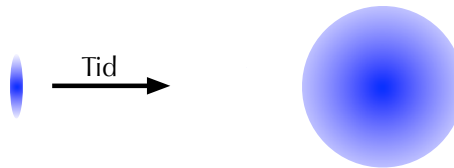
Udvidelse af klassisk gas



De molekulære hastigheder er Maxwell-Boltzmann fordelt

$$N(\mathbf{v}) \propto N \exp(-mv^2/2k_B T) d\mathbf{v}$$

(antallet af molekyler med hastighed mellem \mathbf{v} og $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$)



17

For en klassisk gas, altså en atomar sky ved høje temperaturer, gælder det at atomernes hastigheder er fordelt efter en Maxwell-Boltzmann fordeling. Det primære er, at antallet af atomer med en hastighed i et givent interval kun afhænger af størrelsen på deres hastighed, og derfor er uafhængigt af retningen. Derfor vil en klassisk gas altid udvide sig som en kugle i rummet. Dette er uafhængigt af formen på skyen før udvidelsen.

Udvidelse af et kondensat

Udvidelsen af et aflangt Bose-Einstein kondensat er styret af Heisenbergs ubestemthedsrelationer

$$\Delta p_x \Delta x \gtrsim \hbar$$

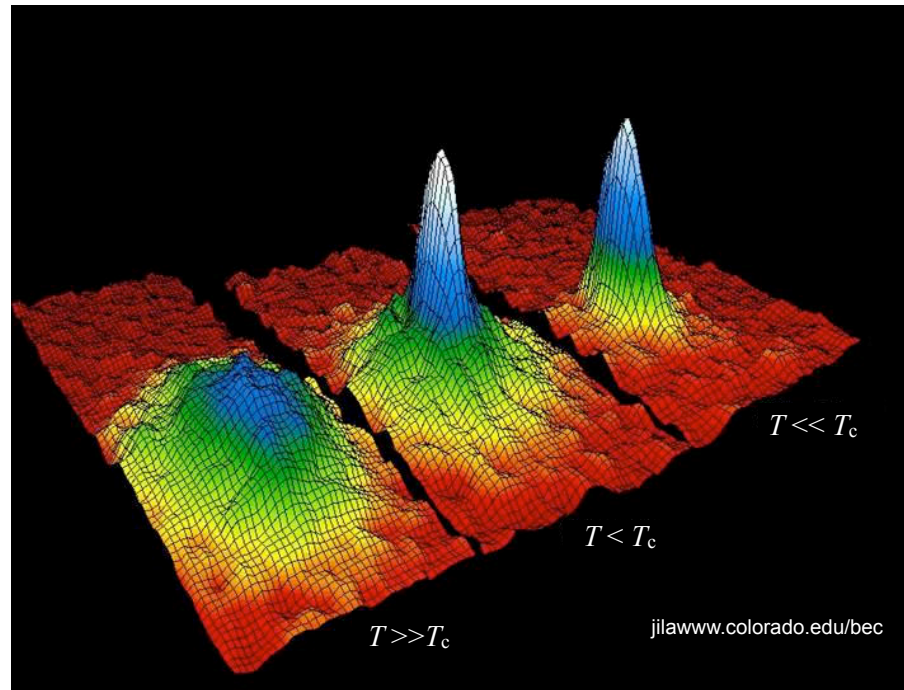
Udvidelsen er derfor hurtigst langs den smalleste akse



Kondensatet opfører sig som en **sej væske** på trods af en meget lav tæthed ($\sim 10^{13}$ atomer/cm³)

18

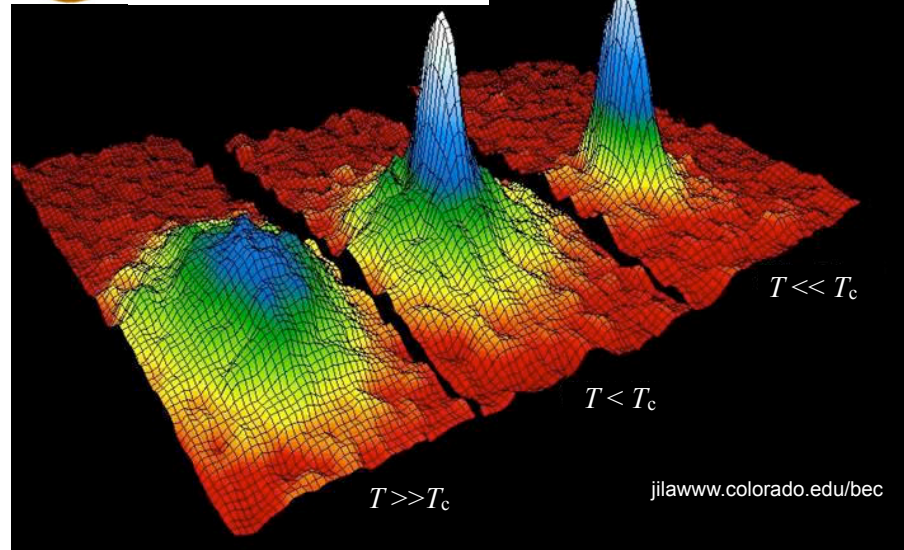
Et Bose-Einstein kondensat er derimod en kvantemekanisk stofbølge, og gassens udvidelse følger derfor en bølgeligning. Heisenbergs usikkerhedsrelationer fortæller os, at hvis et kondensat er aflangt vil det have den største impuls komponent langs den smalleste akse. Det vil sige at når kondensatet udvider sig vil det gøre det hurtigst langs den smalleste akse, således at udvidelsen bevarer kondensatets aflange form, men ombytter den korte og den lange akse. På trods af at skyen er mange gange tyndere end atmosfærisk luft opfører den sig altså som en sej væske, der kan holde sin form.



Dette var præcis hvad man så da man udførte forsøget. Over den kritiske temperatur opfører gassen sig klassisk og et billede af hastighedsfordelingen viser en Maxwell-Boltzmann fordeling, ens i alle retninger. Når temperaturen sænkes til under T_c vokser en ny asymmetrisk profil op i midten. Den repræsenterer kondensatet. Ved endnu lavere temperaturer forsvinder den termiske sky, og man har blot et rent kondensat, som indeholder alle atomerne. Det sidste billede, hvor alle atomerne er i kondensatet, repræsenterer således et fotografi af en bølgefunktion, og illustrerer betydningen af BEC: Vi kan studere kvantemekaniske fænomener med et makroskopisk antal atomer. Vi er vant til at vi må ty til kvantefysikken når vi vil beskrive et enkelt atom, men her er det altså i størrelsesordenen flere tusind til mere end en million atomer, der opfører sig som ét kvantemekanisk objekt, som efter udvidelsen er næsten 1mm stort.



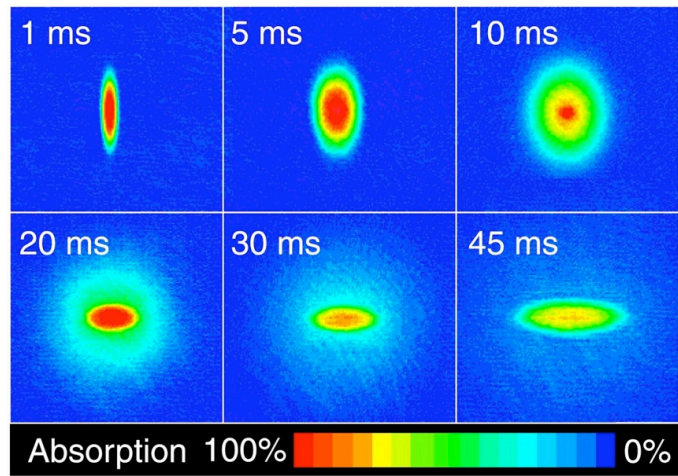
Observeret 1995
Nobelpris 2001
(Cornell, Wieman, Ketterle)



Dette var præcis hvad man så da man udførte forsøget. Over den kritiske temperatur opfører gassen sig klassisk og et billede af hastighedsfordelingen viser en Maxwell-Boltzmann fordeling, ens i alle retninger. Når temperaturen sænkes til under T_c vokser en ny asymmetrisk profil op i midten. Den repræsenterer kondensatet. Ved endnu lavere temperaturer forsvinder den termiske sky, og man har blot et rent kondensat, som indeholder alle atomerne. Det sidste billede, hvor alle atomerne er i kondensatet, repræsenterer således et fotografi af en bølgefunktion, og illustrerer betydningen af BEC: Vi kan studere kvantemekaniske fænomener med et makroskopisk antal atomer. Vi er vant til at vi må ty til kvantefysikken når vi vil beskrive et enkelt atom, men her er det altså i størrelsesordenen flere tusind til mere end en million atomer, der opfører sig som ét kvantemekanisk objekt, som efter udvidelsen er næsten 1mm stort.

Anisotrop udvidelse

http://cua.mit.edu/ketterle_group



Afsnit III

Makroskopiske Kohærente Stofbølger

I dette afsnit ser vi på hvordan kondensatets bølgenatur manifesterer sig.

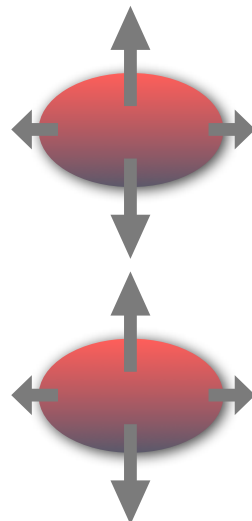
Stofbølge interferens



22

Et fundamentalt eksperiment med kondensater består i at lade to forskellige kondensater overlapse. Hvis kondensatet virkelig er en kohærent stofbølge, hvor alle atomerne svinger i takt må man forvente, at to overlappende kondensater vil interferere som bølger. D.v.s at et mønster af sorte og hvide linjer, der svarer til regioner med konstruktiv og destruktiv interferens, præcis som når bølger på en vandoverflade overlapper.

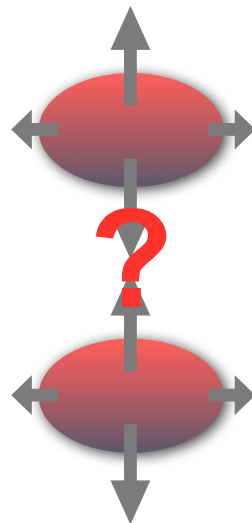
Stofbølge interferens



22

Et fundamentalt eksperiment med kondensater består i at lade to forskellige kondensater overlape. Hvis kondensatet virkelig er en kohærent stofbølge, hvor alle atomerne svinger i takt må man forvente, at to overlappende kondensater vil interferere som bølger. D.v.s at et mønster af sorte og hvide linjer, der svarer til regioner med konstruktiv og destruktiv interferens, præcis som når bølger på en vandoverflade overlapper.

Stofbølge interferens



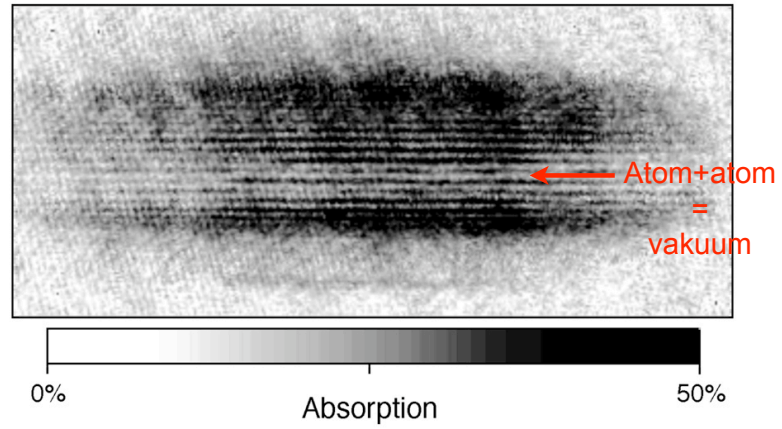
22

Et fundamentalt eksperiment med kondensater består i at lade to forskellige kondensater overlape. Hvis kondensatet virkelig er en kohærent stofbølge, hvor alle atomerne svinger i takt må man forvente, at to overlappende kondensater vil interferere som bølger. D.v.s at et mønster af sorte og hvide linjer, der svarer til regioner med konstruktiv og destruktiv interferens, præcis som når bølger på en vandoverflade overlapper.

Stofbølge interferens

http://cua.mit.edu/ketterle_group

1 mm



23

... og det er præcis hvad man ser i eksperimentet!

Kondensatets bølgefunktion

Kondensatets bølgefunktion er beskrevet ved
Gross-Pitaevskii ligningen

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + g(N-1)|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$



Hartree middelfeltsteori

- ▶ Alle atomer vekselvirker med alle de $N-1$ andre med styrken g
- ▶ Ækvivalent med teori for mange-elektron atomer



Fasekohærens

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi_0(\mathbf{r}_1)\phi_0(\mathbf{r}_2) \cdots \phi_0(\mathbf{r}_N)$$

24

Kondensatets opførsel er beskrevet ved en bølgeligning. Mere præcist er kondensatets bølgefunktion bestemt ved en Schrödinger ligning, men en ikke lineær af slagsen. Den blev første gang udledt af Gross og Pitaevskii, og adskiller sig fra den almindelige, lineære, Schrödinger ligning ved at indeholde et led (nummer tre på højresiden), der beskriver vekselvirkningen mellem alle atomerne i kondensatet. Selvom der er tale om en en-partikel ligning (der optræder kun en enkelt partikel koordinat r), så giver de øvtige $N-1$ partikler anledning til en midlet vekselvirkning med styrken g . Da den atomare vekselvirkning er af meget lille rækkevidde sammenlignet med kondensatets størrelse, er det en god approksimation at antage, at partiklerne kun vekselvirker, hvis de er det samme sted i rummet. Denne form for midlet vekselvirkning med de andre atomer i gassen er ækvivalent med Hartree-Fock teorien for mange-elektron atomer.

Fasekohærens af kondensatet består i, at alle atomerne er beskrevet ved den samme kondensat bølgefunktion ϕ_0 . Den totale bølgefunktion for kondensatet er derved produktet af ϕ_0 funktionerne for alle N atomer.

Kondensatets bølgefunktion

Kondensatets bølgefunktion er beskrevet ved
Gross-Pitaevskii ligningen

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + g(N-1) |\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$



Hartree middelfeltsteori

- ▶ Alle atomer vekselvirker med alle de $N-1$ andre med styrken g
- ▶ Ækvivalent med teori for mange-elektron atomer



Fasekohærens

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \phi_0(\mathbf{r}_1) \phi_0(\mathbf{r}_2) \cdots \phi_0(\mathbf{r}_N)$$

24

Kondensatets opførsel er beskrevet ved en bølgeligning. Mere præcist er kondensatets bølgefunktion bestemt ved en Schrödinger ligning, men en ikke lineær af slagsen. Den blev første gang udledt af Gross og Pitaevskii, og adskiller sig fra den almindelige, lineære, Schrödinger ligning ved at indeholde et led (nummer tre på højresiden), der beskriver vekselvirkningen mellem alle atomerne i kondensatet. Selvom der er tale om en en-partikel ligning (der optræder kun en enkelt partikel koordinat r), så giver de øvtige $N-1$ partikler anledning til en midlet vekselvirkning med styrken g . Da den atomare vekselvirkning er af meget lille rækkevidde sammenlignet med kondensatets størrelse, er det en god approksimation at antage, at partiklerne kun vekselvirker, hvis de er det samme sted i rummet. Denne form for midlet vekselvirkning med de andre atomer i gassen er ækvivalent med Hartree-Fock teorien for mange-elektron atomer.

Fasekohærens af kondensatet består i, at alle atomerne er beskrevet ved den samme kondensat bølgefunktion ϕ_0 . Den totale bølgefunktion for kondensatet er derved produktet af ϕ_0 funktionerne for alle N atomer.

Kondensatets bølgefunktion

Kondensatets bølgefunktion er beskrevet ved Gross-Pitaevskii ligningen

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Kinetisk energi



25

Kondensatets form bestemmes ud fra den balance mellem de tre led på højre siden af den ikke-lineære Schrödinger ligning, der minimerer energien. Jo mindre krumningen af bølgefunktionen er, desto mindre er den kinetiske energi (første led). Så den kinetiske energi søger at sprede kondensatet ud på så stort et område som muligt.

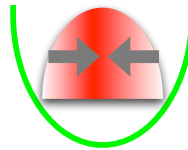
Kondensatets bølgefunktion

Kondensatets bølgefunktion er beskrevet ved Gross-Pitaevskii ligningen

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Fælde potentialet

$$V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$



26

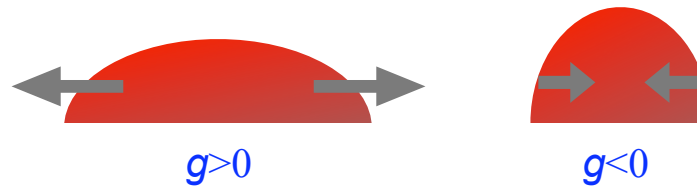
Det andet er fældens potential. Den potentielle energi fra fælde er mindre, jo mindre bølgefunktionen er, så fælden modvirker altså den kinetiske energi.

Kondensatets bølgefunktion

Kondensatets bølgefunktion er beskrevet ved Gross-Pitaevskii ligningen

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Middelfelts vekselvirkningen



27

Det sidste led er vekselvirkningen mellem atomerne. Alt efter fortegnet af vekselvirkningens styrke, g , vil dette led søge at gøre kondensatet større eller mindre alt efter om vekselvirkningerne mellem atomerne er frastøddende ($g > 0$) eller tiltrækkende ($g < 0$).

Kondensatets størrelse

For et **stationært kondensat** $\phi_0(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\mu t/\hbar)\phi_0(\mathbf{r})$

$$\mu\phi_0(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Hvis $g > 0$, og hvis

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{Ng}{(\hbar/m\omega)^{3/2}\hbar\omega} \gg 1$$

kan den kinetiske energi negligeres.

28

Hvis kondensatet er stationært og i ligevægt vil tidsudviklingen være simpel. Bølgefunktionens amplitude er stationær mens fasen udvikler sig lineært med tiden og er proportional med det kemiske potential μ . Det vil sige, at venstre siden i den ikke-lineære Schrödinger ligning kan erstattes med μ ganget med bølgefunktionen, akkurat som den almindelige tidsafhængige Schrödinger ligning, hvor det er energien optræder. Det kemiske potential kan altså betragtes som kondensatets egenenergi. Bemærk, at fasefaktoren er irrelevant for det tredje led på højresiden, da det er normkvadratet på bølgefunktionen, der indgår her.

Som sagt er kondensatets form bestemt af balancen mellem de tre bidrag til energien på højre side af ligningen. Hvis atomerne frastøder hinanden, dvs. $g > 0$, virker den kinetiske energi og vekselvirkningsleddet på samme måde: De vil gøre kondensatet større. Hvis det tredje led bliver stort nok kan vi set bort fra den kinetiske energi. I det tilfælde er ligningen nem at løse. Vi kan simpelt hen dividere med bølgefunktionen på begge sider af lighedstegnet, og ved at omrokere lidt får vi en ligning for kondensatets tæthed (antallet af partikler ganget med norm kvadratet af bølgefunktionen). Det er spøjst at man så at sige kan løse Schrödinger ligningen ved at dividere med bølgefunktionen, med tricket gælder kun fordi der er tale om en ikke-lineær ligning. Og svaret er naturligvis kun gyldigt, der hvor bølgefunktionen ikke er nul.

Der hvor bølgefunktionen bliver nul indikerer præcis overfladen af kondensatet i denne approksimation. Vi kan derfor nemt finde kondensatets størrelse ved at sætte tætheden til nul og løse for r . Det giver kondensatets radius, som i et typisk eksperiment vil være omkring 10 mikrometer.

Kondensatets størrelse

For et **stationært kondensat** $\phi_0(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\mu t/\hbar)\phi_0(\mathbf{r})$

$$\mu\phi_0(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

Hvis $g > 0$, og hvis

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{Ng}{(\hbar/m\omega)^{3/2}\hbar\omega} \gg 1$$

kan den kinetiske energi negligeres.

28

Hvis kondensatet er stationært og i ligevægt vil tidsudviklingen være simpel. Bølgefunktionens amplitude er stationær mens fasen udvikler sig lineært med tiden og er proportional med det kemiske potential μ . Det vil sige, at venstre siden i den ikke-lineære Schrödinger ligning kan erstattes med μ ganget med bølgefunktionen, akkurat som den almindelige tidsafhængige Schrödinger ligning, hvor det er energien optræder. Det kemiske potential kan altså betragtes som kondensatets egenenergi. Bemærk, at fasefaktoren er irrelevant for det tredje led på højresiden, da det er normkvadratet på bølgefunktionen, der indgår her.

Som sagt er kondensatets form bestemt af balancen mellem de tre bidrag til energien på højre side af ligningen. Hvis atomerne frastøder hinanden, dvs. $g > 0$, virker den kinetiske energi og vekselvirkningsleddet på samme måde: De vil gøre kondensatet større. Hvis det tredje led bliver stort nok kan vi set bort fra den kinetiske energi. I det tilfælde er ligningen nem at løse. Vi kan simpelt hen dividere med bølgefunktionen på begge sider af lighedstegnet, og ved at omrokere lidt får vi en ligning for kondensatets tæthed (antallet af partikler ganget med norm kvadratet af bølgefunktionen). Det er spøjst at man så at sige kan løse Schrödinger ligningen ved at dividere med bølgefunktionen, med tricket gælder kun fordi der er tale om en ikke-lineær ligning. Og svaret er naturligvis kun gyldigt, der hvor bølgefunktionen ikke er nul.

Der hvor bølgefunktionen bliver nul indikerer præcis overfladen af kondensatet i denne approksimation. Vi kan derfor nemt finde kondensatets størrelse ved at sætte tætheden til nul og løse for r . Det giver kondensatets radius, som i et typisk eksperiment vil være omkring 10 mikrometer.

Kondensatets størrelse

For et **stationært kondensat** $\phi_0(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\mu t/\hbar)\phi_0(\mathbf{r})$

$$\mu\phi_0(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{fælde}}(\mathbf{r}) + gN|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r})$$

$$n_0(\mathbf{r}) = N|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \simeq \frac{(\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2)}{g}$$

$$R \simeq \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega^2}} \sim 10 \mu\text{m}$$

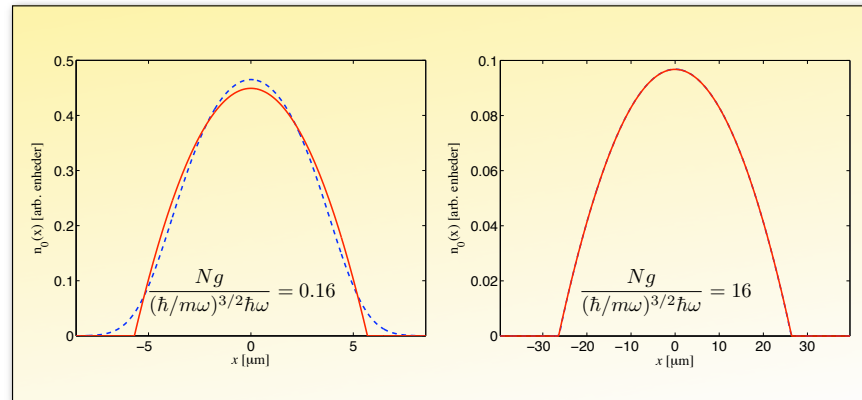
28

Hvis kondensatet er stationært og i ligevægt vil tidsudviklingen være simpel. Bølgefunktionens amplitude er stationær mens fasen udvikler sig lineært med tiden og er proportional med det kemiske potential μ . Det vil sige, at venstre siden i den ikke-lineære Schrödinger ligning kan erstattes med μ ganget med bølgefunktionen, akkurat som den almindelige tidsafhængige Schrödinger ligning, hvor det er energien optræder. Det kemiske potential kan altså betragtes som kondensatets egenenergi. Bemærk, at fasefaktoren er irrelevant for det tredje led på højresiden, da det er normkvadratet på bølgefunktionen, der indgår her.

Som sagt er kondensatets form bestemt af balancen mellem de tre bidrag til energien på højre side af ligningen. Hvis atomerne frastøder hinanden, dvs. $g > 0$, virker den kinetiske energi og vekselvirkningsleddet på samme måde: De vil gøre kondensatet større. Hvis det tredje led bliver stort nok kan vi set bort fra den kinetiske energi. I det tilfælde er ligningen nem at løse. Vi kan simpelt hen dividere med bølgefunktionen på begge sider af lighedstegnet, og ved at omrokere lidt får vi en ligning for kondensatets tæthed (antallet af partikler ganget med norm kvadratet af bølgefunktionen). Det er spøjst at man så at sige kan løse Schrödinger ligningen ved at dividere med bølgefunktionen, med tricket gælder kun fordi der er tale om en ikke-lineær ligning. Og svaret er naturligvis kun gyldigt, der hvor bølgefunktionen ikke er nul.

Der hvor bølgefunktionen bliver nul indikerer præcis overfladen af kondensatet i denne approksimation. Vi kan derfor nemt finde kondensatets størrelse ved at sætte tætheden til nul og løse for r . Det giver kondensatets radius, som i et typisk eksperiment vil være omkring 10 mikrometer.

Kondensatets form



--- Eksakt løsning

— Tilnærmet løsning

29

Kriteriet for hvornår vores lille approksimation til løsning af den ikke-lineære Schrödinger ligning er god, er at produktet af antallet af partikler og styrken af deres vekselvirkninger skal være tilpas stort sammenholdt med fældens frekvens og dens volumen, der karakteriserer fældens størrelse. Vi kan illustrere hvor god approksimationen er ved at sammenligne dens resultat for kondensatets tæthedsfunktion med en eksakt numerisk løsning af den ikke-lineære Schrödinger ligning. Resultatet er vist her for to forskellige værdier af N^*g . I det første tilfælde er overensstemmelse ikke god, mens man i det andet tilfælde, hvor N^*g er 100 gange større, ikke kan se nogen forskel mellem de to kurver.

Afsnit IV

Roterende Kondensater

Som et enkelt eksempel på Bose–Einstein kondensatets spændende fysik vil vi se på hvad der sker, når et kondensat roteres. Som vi skal se betyder kondensatets kvantenatur, at det opfører sig helt anderledes end en klassisk gas.

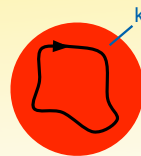
Kvantiserede hvirvler

Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \nwarrow Fase

Bølgefunktionen er en éntydig funktion



kondensatet

Fasen skal ændre sig med

$$\Delta\varphi = n \times 2\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

langs en lukket kurve.

31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fasen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fasen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fasen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

Kvantiserede hvirvler

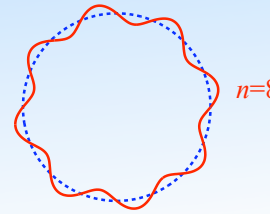
Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \nwarrow Fase

Akkurat som elektronbanerne
i brintatomet

Kun visse bølgelængder
passer på cirklen.
Grundtonen og overtoner.



31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fassen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fassen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fassen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

Kvantiserede hvirvler

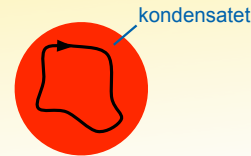
Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \leftarrow Fase

Men faseændringen skal være uafhængig af kurvens form og placering

Hvis funktionen skal være éntydig må faseændringen derfor være nul



31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fassen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fassen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fassen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

Kvantiserede hvirvler

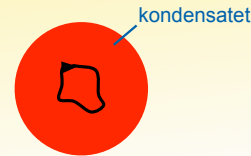
Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \leftarrow Fase

Men faseændringen skal være uafhængig af kurvens form og placering

Hvis funktionen skal være éntydig må faseændringen derfor være nul



31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fasen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fasen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fasen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

Kvantiserede hvirvler

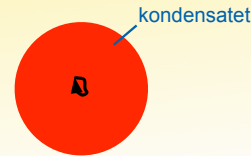
Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \nwarrow Fase

Men faseændringen skal være uafhængig af kurvens form og placering

Hvis funktionen skal være éntydig må faseændringen derfor være nul



31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fasen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fasen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fasen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

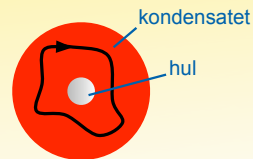
Kvantiserede hvirvler

Kondensatets bølgefunktion kan skrives som

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\varphi}$$

Amplitude \nearrow \nwarrow Fase

... med mindre der er et hul i kondensatet



så er faseændringen endelig

$$\Delta\varphi = 2\pi, 4\pi, \dots$$

og man taler om en hvirvel (vortex)

31

Kondensatet er beskrevet ved en bølgefunktion ϕ_0 , der er et komplekst tal. Den kan derfor skrives som en reel amplitude ganget med en eksponentiel fasefaktor. Fordi bølgefunktionen er en éntydig funktion må der gælde, at fasen kun kan ændre sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve inde i kondensatet. Det er ligegyldigt hvordan vi lægger denne kurve. Det er helt ækvivalent med Bohrs kvantiseringsbetingelse for elektronbanen i brintatomet. Man kan vise, at hvis fasen ændrer sig langs en lukket kurve svarer det til at der løber en strøm i kondensatet. Der er en intim sammenhæng mellem kondensatets fase og flydehastigheden. Men man kan forestille sig, at lade den lukkede kurve skrumpes, indtil dens omkreds er forsvindende. I det tilfælde, hvor kurven er skrumpet ind til et punkt, må vi kræve at fasen ikke ændrer sig langs kurven. Dette argument gælder dog kun hvis der ikke er et hul i kondensatet. Hvis man forestiller sig at kondensatet har et hul, vil en lukket kurve, der løber omkring dette hul ikke kunne skrumpes ind til et punkt. Der er altså i det tilfælde mulighed for (kvantiserede) strømme omkring hullet. I det tilfælde taler man om at kondensatet har en hvirvel (vortex).

Det koster en endelig energi at lave et hul i kondensatet. Derfor starter kondensatet først med at rotere, når man rører hurtigt nok i det til at danne en hvirvel.

Kvante tornadoer



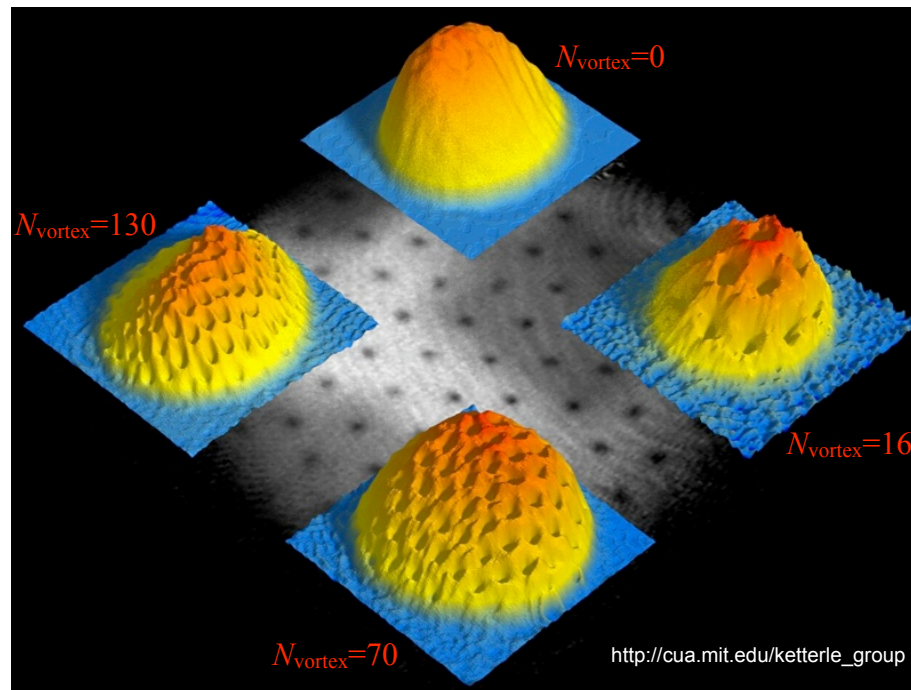
Tilsvarende er det ikke ligetil at fjerne hullet igen, når man først har lavet det. Kvante tornadoen har topologisk stabilitet. Den kan derfor blive ved med at strømme, i modsætning til dens klassiske genpart, som efterhånden taber pusten, når den fejer hen over jorden. Lidt løst sagt kan man sige, at årsagen til kvante hvirvlens stabilitet er kvantiseringen af bølgefunktionens fase. Kun en fase som ændrer sig med et helt tal ganget med 2π langs en lukket kurve, der omslutter hullet, er tilladt. Dvs. at hvirvlen ikke kan bremses langsomt. Hvis den skal stoppe, skal alle atomerne bremse op på én gang.



Hvirvelhastighed

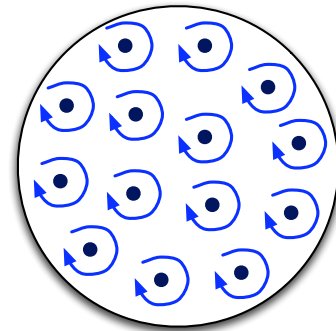
33

Hvirvel bevægelse er anderledes end rotation af et stift legeme, hvor væskehastigheden aftager jo tættere man kommer på rotationsaksen. For en hvirvelbevægelse bliver væskehastigheden større jo tættere man kommer på rotationsaksen.

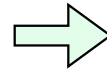


Som sagt betyder omkostningen i energi når man danner en vortex, at kondensatet ikke begynder at sætte sig i bevægelse, før det bliver roteret med tilstrækkelig stor frekvens. Det er illustreret i det øverste billede, hvor rotationsfrekvensen er lille. Rotationsfrekvensen stiger med uret, og man ser at et større og større antal hvirvler bliver dannet i kondensatet. Da hvirvlerne frastøder hinanden, sætter de sig i et regulært gittermønster.

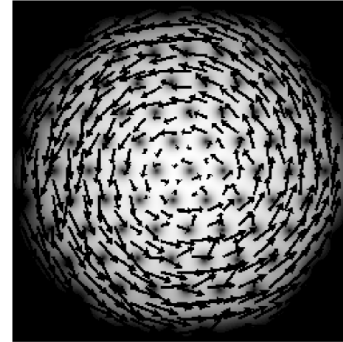
Bohrs korrespondens princip



kvantemekanisk



Feder & Clark, PRL **87**, 190401 (2001)



“klassisk”

35

Rundt om hver hvirvel er der et lokalt hastighedsfelt, hvor væskehastigheden stiger jo tættere man kommer på hvirvlens hul. Men når der er mange hvirvler i gassen nærmer det totale hastighedsfelt, som er summen af hastighedsfeltet fra hver enkelt hvirvel, hastighedsfeltet for et stift legeme. Altså at hastigheden bliver større, jo længere man er væk fra rotationsaksen. Denne overgang hvor et stort antal kvantemekaniske delsystemer tilsammen opfører sig klassisk er en illustration af Bohrs korrespondensprincip.

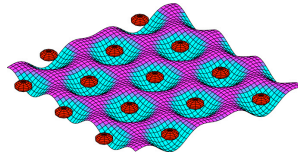
Andre spændende emner

Langsomt lys



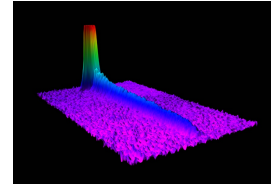
Lene Hau

Kvantecomputer



B. Blakie

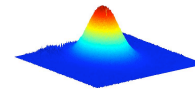
Atom laser



T. Esslinger

Ultrakolde fermioner

BEC i Danmark



Reklame

Hvis du gerne vil vide mere:

- KVANT marts 2005
- <http://person.au.dk/da/nygaard@phys.au.dk>

Åbent hus på IFA:

- u-days** d. 2. og 3. marts 2006. Begge dage kl. 13-16.
- Fagligt foredrag (*Steen Hannestad*)
 - Rundvisning på instituttet
 - www.phys.au.dk/u-days



Kondensatets hastighed

Kondensatets bølgefunktion $\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})}e^{i\varphi}$

Husk at impuls operatoren er $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = -i\hbar\nabla$

Vi definerer strømtheden som

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = n_0(\mathbf{r})m\mathbf{v} \equiv \text{Re} [\phi_0^*(\mathbf{r})\mathbf{p}\phi_0(\mathbf{r})]$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \frac{1}{mn_0(\mathbf{r})} \text{Re} [\hbar n_0(\mathbf{r})\nabla\varphi - i\hbar\sqrt{n_0}\nabla\sqrt{n_0}]$$

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m}\nabla\varphi = \frac{\hbar}{mr_{\perp}}$$

Alle atomerne i kondensatet har den samme fase. De flyder i takt.

[tilbage](#)